28 Mars 2025 *Vincent Benjamin*

Série 6 – Examen blanc

Exercice 1 : Siphon - Cas statique (7 points)

On considère l'arrangement statique suivant (voir figure ci-dessous), avec un bac de section S_b contenant un liquide incompressible de densité ρ_L. Le siphon (tube courbé), de section constante $S_S \ll S_b$, est ouvert à ses deux extrémités. À l'intérieur du siphon, un piston étanche est attaché à un fil, les deux ont une masse que l'on pourra négliger. On suppose que la force $\vec{F}$ appliquée sur la fils est transmise au point d'attache avec le piston et où elle est alors normale à la surface du piston en contact avec l'air. Le siphon et le fil peuvent être déplacés le long du siphon sans frottement. En tirant sur le fil, vous avez fait remonter le piston jusqu'à la position 1, comme indiqué sur la figure, aspirant ainsi une partie du liquide.

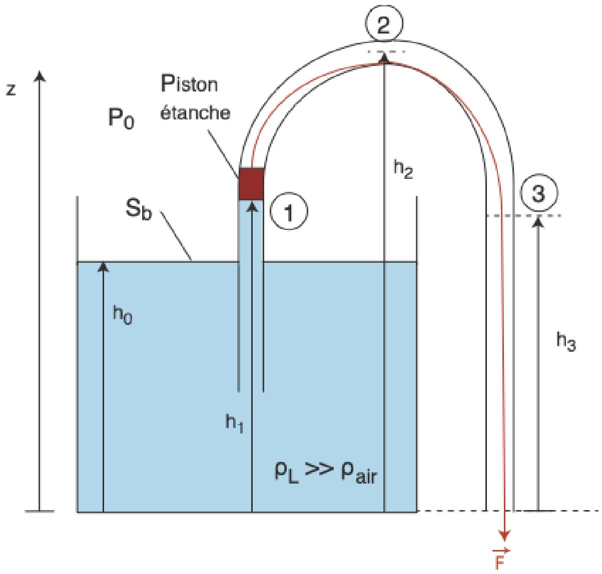
Remarque : On supposera que le liquide est constamment en contact avec une des surfaces du piston et que l'air de l'autre coté est à la pression p_0. On négligera les effets de capillarité, les variations de niveau du liquide dans le bac, ainsi que les variations de pression dans l'atmosphère ($\rho_L \gg \rho_{air}$).

(a) Dans le cas statique (le piston ne bouge pas) et quand le piston est à la position 1, quelle est la pression du liquide près du piston et quelle est la norme de la force $F = |\vec{F}|$ que vous devez exercer sur le fil ?

(b) Même question qu'en (a) si le piston est à la position 2 et 3.

(c) Si vous continuez à tirer le piston, F devient nulle. À quelle position du piston cela se produit-il ? Faites un dessin de la situation et justifiez votre réponse.

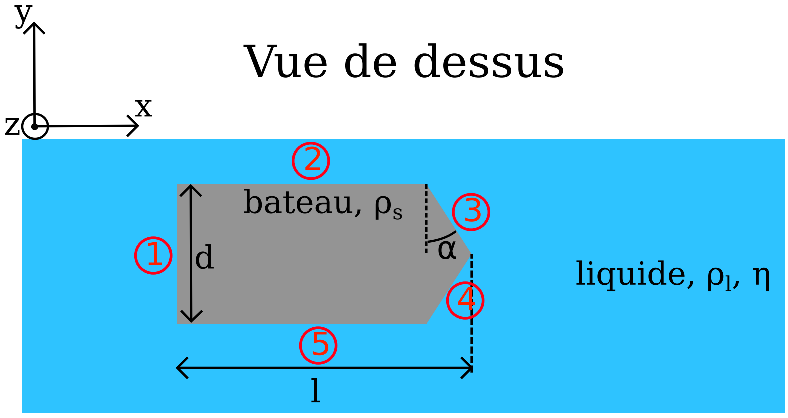
(d) Que se passe-t-il si vous déplacez le piston plus loin que la position identifiée dans la partie (c) ?

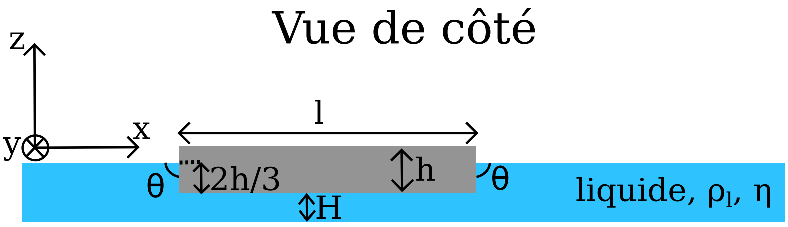


Exercice 2 : Bateau en plastique (8 points)

On considère une plaque en plastique, de densité ρ_s et en forme de bateau, qui flotte sur un liquide incompressible de densité ρ_l et de viscosité η. Les dimensions du bateau sont définies par les quantités l, d, h et α. Le bateau est enfoncé dans le liquide jusqu'aux deux tiers de sa hauteur h, de telle sorte que la hauteur H d'eau sous le bateau respecte les inégalités $l \gg H$ et $d \gg H$. La figure ci-dessous illustre ces différentes longueurs.

La tension superficielle pour l'interface liquide-air est donnée par γ_{lg}, celle de l'interface liquide-plastique par γ_{ls} et celle de l'interface plastique-air par γ_{sg}. L'angle de contact θ du liquide sur le plastique est égal à $90°$.





(a) Comment expliquez-vous le fait que le bateau flotte ? Utilisez ceci pour trouver le rapport ρ_s/ρ_l.

(b) À cause de la tension superficielle, les différentes faces du bateau, numérotées de 1 à 5 (voir figure), ressentent chacune une force. Trouvez les composantes de ces forces selon la direction x. Déterminez la force totale ressentie par le bateau due à la tension superficielle selon la direction x, puis selon la direction y.

(c) On ajoute du savon dans la région derrière le bateau, ce qui réduit la tension superficielle γ_{lg} à proximité de la face 1 par un facteur 2, tandis que γ_{lg} reste inchangée à proximité des autres faces. En supposant que γ_{ls} et γ_{sg} ne sont pas modifiés par la présence du savon, montrez que θ reste égal à $90°$ pour toutes les faces du bateau. Quelle est maintenant la force totale exercée sur le bateau par la tension superficielle ?

(d) Après avoir ajouté du savon, on observe que le bateau accélère, jusqu'à atteindre une vitesse finale v_f. On se place dans le cadre d'un écoulement laminaire. Dans ce cas, on peut supposer que, dans la direction x, les seules forces s'appliquant sur le bateau sont les forces dues à la tension superficielle et la friction visqueuse agissant sur le fond du bateau. On suppose qu'au cours du mouvement, la face 1 du bateau reste en contact avec l'eau savonneuse, tandis que les autres faces le sont avec l'eau non-savonneuse. Trouvez l'expression de la vitesse finale du bateau en fonction de H, l, d, α, γ_{lg} et η.

Exercice 3 : Champ de vitesse (8 points)
On considère l'écoulement d'un fluide parfait et incompressible ($\rho = \rho_0 = const.$) dont le champ de vitesse est le suivant :

$$\vec{u}(\vec{r}, t) = \frac{1}{\tau}(x\vec{e}_x - y\vec{e}_y)$$

où $\tau > 0$ est une constante donnée.

(a) Indiquez, dans le plan xy, le vecteur $\vec{u}$ aux points suivants :

$$\begin{array}{lll} (x, y) = (-1, 1); & (x, y) = (0, 1); & (x, y) = (1, 1); \\ (x, y) = (-1, 0); & (x, y) = (0, 0); & (x, y) = (1, 0); \\ (x, y) = (-1, -1); & (x, y) = (0, -1); & (x, y) = (1, -1); \end{array}$$

Pour les représentations graphiques, prenez $\tau = 1$s.

(b) Démontrez que ce champ de vitesse satisfait l'équation de continuité.

(c) Déterminez l'accélération d'un élément de fluide en un point (x, y) arbitraire. Tracez qualitativement la forme de la ligne de courant proche du point $(1, 1)$ et passant par ce dernier. Justifiez votre réponse.

(d) Utilisez l'équation d'Euler pour déterminer l'expression du champ scalaire de pression $p(\vec{r}, t)$ sachant que $p(\vec{r} = \vec{0}, t) = p_0$. L'effet de la gravité pourra être négligé.

(e) Pourquoi ce champ de vitesse ne peut-il pas décrire l'écoulement en tout point de l'espace ? En considérant le résultat de (d), trouvez r_{max}, la valeur maximale de $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ pour laquelle l'expression de $\vec{u}(\vec{r}, t)$ reste physiquement valable en tout point tel que $r < r_{max}$.